



TITLE:

# 多値フェイルセーフシステム (多値論理およびその応用 II)

AUTHOR(S):

高岡, 忠雄

---

CITATION:

高岡, 忠雄. 多値フェイルセーフシステム (多値論理およびその応用 II). 数理解析研究所講究録 1972, 140: 336-352

ISSUE DATE:

1972-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106666>

RIGHT:

## 多値フェイルセーフシステム

日本電信電話公社武蔵野電気通信研究所

高岡忠雄

### 1. はじめに

渡辺, 高橋 (1) によって提出されたフェイルセーフシステムの研究は, 最初, 入力, 及び論理素子の出力が非対称に誤るとき, 全システムの出力が非対称に誤るように論理回路を構成できるかという問題から出発した。安全側へ出力が非対称に誤ってもそれは許容される場合があるというのがフェイルセーフの言葉の由来である。その後の研究者達による結論を述べれば, 実現すべき論理関数がユネイトであることが十分条件であり, また, 論理関数がユネイトでない場合, それぞれ別の方向へ非対称に誤る入力および論理素子を用いシステムを二重化することによってフェイルセーフシステムを構成することができるということであった。一方, 著者ら (2) が提唱した  $N$ -フェイルセーフシステム (別の著者 (3) によって重形フェイルセーフともいう) を二重系を用いて構成することにより, 上記の古典的フェイルセーフシステムの理論を包含し得る。本稿では, この  $N$ -フェイルセーフの概念を一般の多値論理系に拡張し, 多値論理関数を二値

非対称誤り素子および入力を用いて、フェイルセーフに実現するシステムの構成法について述べる。この議論は、二値論理の場合の  $N$ -フェイルセーフの概念を完全に含むことが判明する。

## 2. 多値論理関数のフェイルセーフ関数

定義 1.  $m$  個の直理値からなる真理値集合  $T$  を  $T = \{t_0, \dots, t_{m-1}\}$  で定義する。  $n$  変数の  $m$  値論理関数とは、写像  $f: T^n \rightarrow T$  で定義される。変数を  $x_1, \dots, x_n$  で表わし、関数を  $f(x_1, \dots, x_n)$  で表わす。変数ベクトルを  $x = (x_1, \dots, x_n)$  で表わすことにより、関数を  $f(x)$  とも記す。

定義 2.  $T$  のすべての部分集合からなる集合 (すなわち  $T$  のべき集合) から空集合を取り去ったものを  $\tilde{T}$  で表す。  $\tilde{T}$  の元の個数は  $2^m - 1$  である。  $x, y \in \tilde{T}$  に対し、その大小関係  $x \leq y$  を、  $x, y$  が  $T$  の部分集合として  $y$  が  $x$  を含むか、或いは  $x$  に等しいときで定義する。かくして、  $\tilde{T}$  はこの順序に関して半順序集合となる。また、各  $t_i \in T$  に対し、  $\{t_i\}$  と  $t_i$  を便宜上同一視する。

定義 3. 関数  $f': \tilde{T}^n \rightarrow \tilde{T}$  が関数  $f: T^n \rightarrow T$  のフェイルセーフ (FS) 関数であるとは

$$\forall x \in T^n \quad f'(x) = f(x) \quad (1)$$

$$\forall x \in T^n, \forall x' \in \hat{T}^n \quad x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f'(x) \quad (2)$$

が成り立つときをいう。ここに  $x \leq x'$  はその要素ごとの大小関係による。

このFS関数の定義の意味はつぎの如くである。すなわち、入力  $x$  が  $T^n$  の範囲内にあるときは正しい入力であるから  $f'(x)$  の出力値は正しく  $f(x)$  の値と一致する。入力の誤り  $x \rightarrow x'$  は  $x \in T^n, x' \in \hat{T}^n$  で  $x \leq x'$  なるものに限る。このとき、 $f'(x')$  の値を、 $x \leq x', x \in T^n$  なるすべての  $x$  に対する  $f(x)$  の値を含むように、 $\hat{T}$  の元でもって定義しようというわけである。

補題1.  $x_1, \dots, x_r$  をそれぞれ適当な次元の変数ベクトルとする。 $f_1(x_1), \dots, f_r(x_r), g(y_1, \dots, y_r)$  がそれぞれ  $m$  値論理関数で、 $f'_1(x_1), \dots, f'_r(x_r), g'(y_1, \dots, y_r)$  がそれぞれのFS関数であるとするとき、関数  $g'(f'_1(x_1), \dots, f'_r(x_r))$  は  $g(f_1(x_1), \dots, f_r(x_r))$  のFS関数である。

証明. 明らかである。

これによって、フェイルセーフシステムをカスケードに合成するとき、フェイルセーフ性が保存されることがわかる。

定義4.  $f$  のFS関数  $f', f''$  に対し、順序  $f' \leq f''$  を

$$f' \leq f'' \Leftrightarrow \forall x \in \tilde{\tau}^n \quad f'(x) \leq f''(x) \quad (3)$$

で定義する。

$x \in \tilde{\tau}^n$  は入力情報の拡散を意味し,  $f'(x)$  の値は出力の値の拡散を意味するから, 出力が誤りでない限りにおいて, この出力における情報損失を最小にするような FS 関数が効率の観点から望ましい。それは (3) 式の意味での順序における最小の FS 関数を求めることである。

定義 5. 与えられた  $m$  値論理関数  $f(x)$  に対して, 関数  $\tilde{f}: \tilde{\tau}^n \rightarrow \tilde{\tau}$  をつぎのように定義する。

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = \{f(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in x_1, \dots, a_n \in x_n\} \quad (4)$$

補題 2.  $\tilde{f}$  は  $f$  の FS 関数である。

証明. 条件 (1) は明らかである。条件 (2) については,

$$\forall x, \forall x' \in \tilde{\tau}^n \quad x \leq x' \Rightarrow \tilde{f}(x) \leq \tilde{f}(x')$$

が成り立つ。すなわち,  $\tilde{f}(x)$  は単調増大関数であり, したがって条件 (2) をみたす。 (証明終)

補題 3.  $f$  の任意の FS 関数  $f'$  に対して  $\tilde{f} \leq f'$  がなりたつ。

証明. (2) より

$$\forall y \in T, \forall x \in \tilde{T}^n \quad y \leq x \Rightarrow f(y) \leq f'(x)$$

である。このようなすべての  $f(y)$  を集めた集合が  $\tilde{f}(x)$  に他ならない。それ故

$$\forall x \in \tilde{T}^n \quad \tilde{f}(x) \leq f'(x)$$

が成り立つ。

(証明終)

$m=2$  の場合, 著者は集合  $\{0, 1\}_{\wedge}^N$  という名前をつけ, 平山らは至という名前をつけた。そして, 情報損失最大の関数を向殿(4) は C 形フエイルセーフ関数と呼んだ。否定, 論理積, 論理和に対する関数  $\tilde{f}$  を下記の表に示しておく。

表 1.

$x$	0	1	$N$
$\tilde{f}$	1	0	$N$

否 定

$x_2$	0	1	$N$
$x_1$	0	0	0
0	0	0	0
1	0	1	$N$
$N$	0	$N$	$N$

論理積

$x_2$	0	1	$N$
$x_1$	0	0	1
0	0	0	$N$
1	1	1	1
$N$	$N$	1	$N$

論理和

### 3. 関数の展開

本節では、関数を展開したとき、情報損失度がどのように変化するかについて考察する。まず、 $f(x)$  が

$$f(x) = F(f_1(x_1), \dots, f_r(x_r)) \quad (5)$$

$$x_1 \cup \dots \cup x_r = x$$

という形式に展開できたものとする。ここに、各  $f_i(x_i)$  および  $F(y_1, \dots, y_r)$  は  $m$  値論理関数であり、記号 " $\cup$ " は各変数ベクトル  $x_i$  を集合とみなしてそれらの和集合をとることを意味する。 $\tilde{F}(\tilde{f}_1(x_1), \dots, \tilde{f}_r(x_r))$  を簡単のため  $\tilde{F}(x)$  と記す。

補題 1 および 3 より

補題 4.  $\tilde{F}(x)$  は  $f(x)$  の FS 関数であり

$$\forall x \in \tilde{T} \quad \tilde{f}(x) \leq \tilde{F}(x) \quad (6)$$

が成り立つ。

すでにみたように、 $\tilde{f}(x)$  より小さい、 $f$  の FS 関数は存在しないから、 $\tilde{f}(x)$  を情報無損失な FS 関数と呼ぶことにする。

つぎに、情報無損失な展開形式、すなわち、式 (6) が等号

で成り立つような  $F(x)$  のための展開形式が存在するかどうかについて考察する。

定義 6. (5) 式において,  $i \neq j$  なる各  $i, j$  に対して,  
 $x_i \cap x_j = \emptyset$  であるとき, (5) 式を樹枝状展開という。

定理 1. (5) 式が樹枝状展開であるとき

$$\forall x \in \tilde{T}^n \quad \tilde{f}(x) = \tilde{F}(x) \quad (7)$$

がなり立つ。

証明. 樹枝状の仮定より

$$\begin{aligned} & \tilde{F}(x) \\ &= \tilde{F}(\tilde{f}_1(x_1), \dots, \tilde{f}_r(x_r)) \\ &= \{ F(b_1, \dots, b_r) \mid b_1 \in \tilde{f}_1(x_1), \dots, b_r \in \tilde{f}_r(x_r) \} \\ &= \{ F(b_1, \dots, b_r) \mid b_1 \in \{ f_1(a_1) \mid a_1 \leq x_1 \}, \dots, b_r \in \{ f_r(a_r) \mid a_r \leq x_r \} \} \\ &= \{ F(f_1(a_1), \dots, f_r(a_r)) \mid a_1 \leq x_1, \dots, a_r \leq x_r \} \\ &= \{ f(a) \mid a \leq x \} \\ &= \tilde{f}(x) \end{aligned}$$

(証明終)

系. (5) 式は二次の展開であるが, 任意の次数の展開形式に対して, その中に用いられている関数すべてを“ $\sim$ ”関数に変えて得られる関数値を  $\tilde{F}(x)$  で表すとき, この  $\tilde{F}(x)$  に



対して補題4および定理1がなりたつ。

与えられた関数  $f(x)$  がいつでも樹枝状展開をもつとは限らない。どんな  $f(x)$  に対しても, (6) 式が等号で成立するような展開形式が存在するであろうか。  $m=2$  の場合については, 主項展開がそれである。(2)。一般の  $m$  値の場合はいまのところ不明である。

#### 4. 多値論理関数の多線式表現

本節では, 非対称に誤る二値の入力および素子を用いて, 多値論理関数のフェイルセーフシステムを構成する方法を提出する。

定義7. 以後, 簡単のため三変数の  $m$  値論理関数  $f(x, y, z)$  を考える。(こうしても一般性を失わない)。宇宙  $\mathcal{U}$ :  $T \rightarrow \{0, 1\}^d$  ( $d$ : 自然数) のもとで, 関数  $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$  が  $f(x, y, z)$  を二値表現するとは, ベクトル  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in \{0, 1\}^d$  の  $d$  個の二値関数  $f_0(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}), \dots, f_{d-1}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$  が存在して,

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = (f_0(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}), \dots, f_{d-1}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}))$$

とかくとき,

$$\forall x, \forall y, \forall z \in T \quad \varphi(f(x, y, z)) = f(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)) \quad (8)$$

がなりたつときをいう。

このとき，多値論理関数  $f(x, y, z)$  は二値論理を用いて  $d$  線式に表現されたという。明らかに， $d \geq [\log_2 m] + 1$  でなければならぬ。

$\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{d-1})$  と表し， $x_i$  を  $\mathbf{x}$  の第  $i$  番目の要素という。第  $i$  番目の要素が 1 で他はすべて 0 であるような  $d$  次元ベクトルを  $\mathbf{e}_i$  で表す。

定義 8. 写像  $\varphi: T \rightarrow \{0, 1\}^m$  を  $t_i \mapsto \mathbf{e}_i$  で定義し，二値関数  $f_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  ( $l = 0, \dots, m-1$ ) を

$$f_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{i,j,k} a_{lij k} x_i y_j z_k \quad (9)$$

$$a_{lij k} = 1, \quad \text{if } f(t_i, t_j, t_k) = t_l$$

$$= 0, \quad \text{otherwise}$$

(ここでの加算と乗算はブール代数に従う)

で定義し， $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (f_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \dots, f_{m-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}))$  とかく。

( $\mathbf{e}_i$  の定義は  $d = m$  の場合で定義される)。

定理 2. 定義 8 で定義した関数  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  は写像  $\varphi$  のもと

で  $m$  値論理関数  $f(x, y, z)$  を値表現する。

証明.  $f(t_i, t_j, t_k) = t_l$  と仮定する。このとき,

$\varphi(f(t_i, t_j, t_k)) = \tau_l$  である。一方

$$f_{\tau_l}(\tau_i, \tau_j, \tau_k) = a_{lijk} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

また  $l \neq k$  なる  $k$  に対しては  $f_{\tau_k}(\tau_i, \tau_j, \tau_k) = 0$  となること

は明らかであり, したがって,  $f(\tau_i, \tau_j, \tau_k) = \tau_l$  となり,

(8) 式が成り立つ。 (証明終)

定義 9. 写像  $\varphi$  を写像  $\tilde{\varphi}: \tilde{T} \rightarrow \{0, 1\}^m$  へつぎのように拡張定義する。  $x \in \tilde{T}$ ,  $\tau \in \{0, 1\}^m$  に対して,

$$\tilde{\varphi}(x) = \tau \Leftrightarrow (t_i \in x \Leftrightarrow \tau_i = 1) \quad (10)$$

また, ベクトル  $\tau, \eta \in \{0, 1\}^m$  の和  $\tau + \eta$  を

$$[\tau + \eta]_i = \tau_i + \eta_i$$

で定義する。

補題 5. ベクトルの集合  $\{\tau^{(i)}\}$ ,  $\{\eta^{(j)}\}$ ,  $\{\xi^{(k)}\}$  があるとき,  
定義 8 で定義された関数  $f(\tau, \eta, \xi)$  について,

$$f(\sum_i \mathbf{x}^{(i)}, \sum_j \mathbf{y}^{(j)}, \sum_k \mathbf{z}^{(k)}) = \sum_i \sum_j \sum_k f(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(j)}, \mathbf{z}^{(k)})$$

がなりたつ。

証明. ベクトル  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \{0, 1\}^m$  に対して

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + f(\mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

を示せば十分である。いま,  $[\mathbf{x}]_i = \xi_i, [\mathbf{x}']_i = \xi'_i$  とする。

任意の  $l$  に対して

$$\begin{aligned} f_l(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \sum_{i,j,k} a_{lijR} (\xi_i + \xi'_i) \eta_j z_k \\ &= \sum_{i,j,k} a_{lijR} \xi_i \eta_j z_k + \sum_{i,j,k} a_{lijR} \xi'_i \eta_j z_k \end{aligned}$$

がなりたつことより明らかである。

(証明終)

定理3. (8)式で定義された関数  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  は写像  $\tilde{\psi}$  のもとで  $m$  値論理関数  $f(x, y, z)$  の情報無損失な FS 関数  $\tilde{f}(x, y, z)$  を二値表現する。

証明.  $u \in \tilde{\mathcal{U}}$  に対して

$$\tilde{\psi}(u) = \sum_{a \in u} \psi(a)$$

である。ここに  $\Sigma$  はベクトルの加算である。それ故、

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(\tilde{f}(x, y, z)) &= \tilde{\psi}(\{f(a, b, c) \mid a \in x, b \in y, c \in z\}) \\ &= \sum_{a \in x} \sum_{b \in y} \sum_{c \in z} \psi(f(a, b, c))\end{aligned}$$

一方、補題 5 より

$$\begin{aligned}f(\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(y), \tilde{\psi}(z)) &= f\left(\sum_{a \in x} \psi(a), \sum_{b \in y} \psi(b), \sum_{c \in z} \psi(c)\right) \\ &= \sum_{a \in x} \sum_{b \in y} \sum_{c \in z} f(\psi(a), \psi(b), \psi(c))\end{aligned}$$

ところが、定理 2 より

$$\psi(f(a, b, c)) = f(\psi(a), \psi(b), \psi(c))$$

であるから

$$\tilde{\psi}(\tilde{f}(x, y, z)) = f(\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(y), \tilde{\psi}(z))$$

が、える。

(証明終)

以上の定理より、定義 8 による対応  $\psi$  のもとで、 $\psi(x) = \mathfrak{A}$ ,  
 $\psi(y) = \mathfrak{B}$ ,  $\psi(z) = \mathfrak{C}$  と表わし、多値論理関数  $f(x, y, z)$  を

(9) 式で与えられる関数  $f(\xi, \eta, \zeta)$  で表わすことをフエイルセイツ表現ということにする。なお,  $|\xi| = \xi_0 + \dots + \xi_{m-1}$  とすると, (9) 式は  $|\xi| = 1$ ,  $|\eta| = 1$ ,  $|\zeta| = 1$  なる関係式を用いて簡単化できる場合がある。

例 1. 次表で与えられる 3 値論理関数に対して, フエイルセイツ表現は

表 2.

$x$	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$y$	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$f(x, y)$	3	2	1	2	2	2	3	2	2

$$f_1(\xi, \eta) = \xi_1 \eta_3$$

$$\begin{aligned} f_2(\xi, \eta) &= \xi_1 \eta_2 + \xi_2 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) + \xi_3 \eta_3 \\ &= \xi_1 \eta_2 + \xi_2 + \xi_3 \eta_3 \end{aligned}$$

$$f_3(\xi, \eta) = \xi_1 \eta_1 + \xi_3 \eta_1$$

で与えられる。

例 2.  $T = \{t_0, \dots, t_{m-1}\}$  が半順序  $\leq$  をもち, 最小元を  $t_0$ , 最大元を  $t_{m-1}$  とする束であるとする。演算  $\wedge$ ,  $\vee$  は

$$x \wedge y = \min \{x, y\} \quad (11)$$

$$x \vee y = \max \{x, y\} \quad (12)$$

で定義される。(5). これらの関数のフェイルセーフ表現を,  
 (11) 式に対しては  $f(\xi, \eta)$ , (12) 式に対しては  $g(\xi, \eta)$  とす  
 る.  $f_\ell(\xi, \eta)$ ,  $g_\ell(\xi, \eta)$  はそれぞれ

$$f_\ell(\xi, \eta) = \xi_\ell \sum_{t_i \geq t_\ell} \eta_i + \eta_\ell \sum_{t_i \geq t_\ell} \xi_i$$

$$g_\ell(\xi, \eta) = \xi_\ell \sum_{t_i \leq t_\ell} \eta_i + \eta_\ell \sum_{t_i \leq t_\ell} \xi_i$$

であたえられる. さらに

$$f_0 = \xi_0 + \eta_0, \quad f_{m-1} = \xi_{m-1} \eta_{m-1}$$

$$g_0 = \xi_0 \eta_0, \quad g_{m-1} = \xi_{m-1} + \eta_{m-1}$$

である. ここで,  $m=2$  とおけば, 2値の場合の, 従来よく  
 知られているフェイルセーフ表現が得られる.

## 5. 多値ユネイト関数

前節までは, フェイルセーフの条件として, 情報の拡散の  
 誤りのみを認めた. 本節では, 出力値の集合の上にある半  
 順序を仮定し, その半順序に従って大きい方への誤りが認め  
 られるものとしよう.

定義 10.  $m$  値論理関数  $f(x_1, \dots, x_n)$  が与えられたとき、出力値の集合の上の半順序  $\leq_o$ 、入力値の集合の上の半順序を、変数  $x_1, \dots, x_n$  に応じて  $\leq_1, \dots, \leq_n$  とし、 $\leq_I$  を

$$x \leq_I x' \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x'_1, \dots, x_n \leq_n x'_n$$

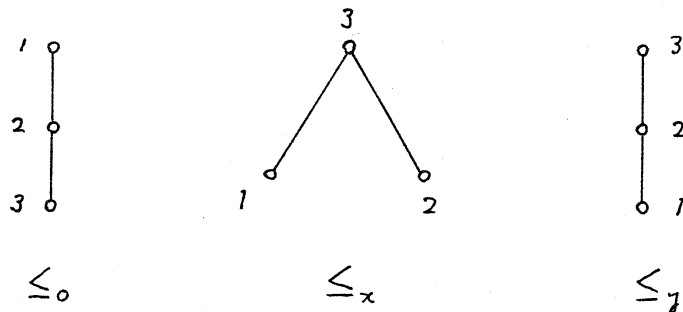
で定義する。  $f(x)$  が順序  $(\leq_I, \leq_o)$  に関して単調であるとは、

$$\forall x, \forall x' \in T^n \quad x \leq_I x' \Rightarrow f(x) \leq_o f(x')$$

の成り立つときをいう。  $\leq_o, \leq_1, \dots, \leq_n$  がすべて恒等関係でないとき、 $f(x)$  はユニテイトであるという。

例 3. 例 1 の関数  $f(x, y)$  について、各半順序が次の図のように与えられる。

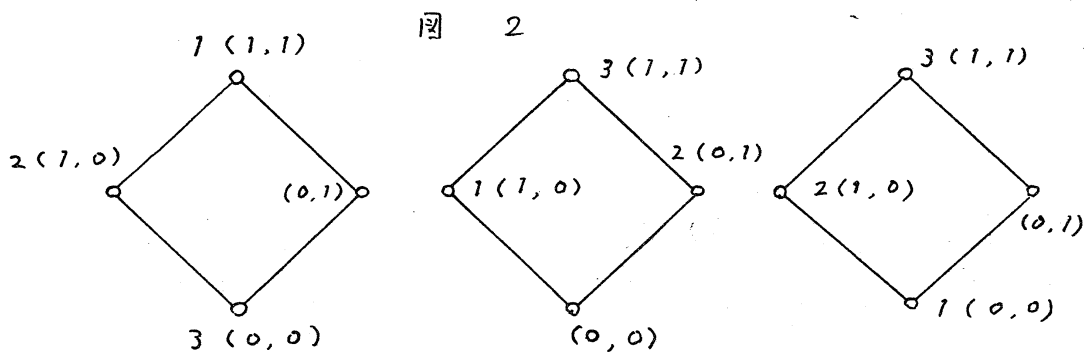
図 1





この節でのフェイルセーフの条件を少し変更して、半順序  $\leq 0$  に関して大  $\rightarrow$  小の誤りを禁止することにする。上記の半順序を埋め込むようにコーディングすれば、本節でのフェイルセーフ条件をみたす二値フェイルセーフシステムを構成することができる。

例 4. 例 3 の半順序は次の図のように coding できる。



本節の問題の稿を改めて詳細に論ずることにする。

おわりに、本題について、いろいろご議論して頂いた、京都大学の茨木俊秀氏、長谷川助教授、および三根教授に感謝する。

## 文 献

- (1) 渡辺, 高橋, "フェイルセーフ形論理系の構成法",  
昭40年信学会大
- (2) 三根, 高岡, "非対称故障論理回路を用いた2重系の  
構成法," 信学会オートマトン研資(1967-09).
- (3) 平山, 渡辺, 浦野, "Fail-Safe 論理系の構成理論,"  
信学論(C), 52-C, 7, p.33 (昭44-12).
- (4) 向殿政男, "C形 Fail Safe 論理の数学的構造につい  
て," 信学論(C), 52-C, 12, p.812 (昭44-12).
- (5) 伊藤誠, "n値函数束(n値論理に就て(I)), "  
九大工学集報, 28, 2 (昭30).